TEILCHEN

Mechanik der Punktmasse und des starren Körpers

Bei der Beschreibung von Bewegungsvorgängen ist es oft zulässig, von den Abmessungen und der Gestalt der beteiligten Körper sowie den Bewegungen ihrer einzelnen Teile gegeneinander (*innere* Bewegungen) abzusehen und die Körper als unveränderliche stoffliche **Teilchen** von konstanter Menge Substanz und gegebenenfalls konstanter elektrischer Ladung zu idealisieren. Das Teilchen dient so als *Denkmodell* für Körper sowohl in der Mikro- als auch in der Makrophysik, indem einerseits z. B. Elektronen, Atomkerne und die Moleküle eines Gases, andererseits aber auch die Planeten, deren Abmessungen klein sind im Verhältnis zu den Räumen, in denen sie sich bewegen, als Teilchen idealisiert werden können.
Für die mathematische Behandlung ist es zweckmäßig, wenn man sich die gesamte stoffliche Substanz sowie die daran gebundene elektrische Ladung des Teilchens in einem Punkt konzentriert denkt, so dass seine Lage durch die drei Koordinaten des Raumes angegeben werden kann. Man spricht dann von einer **Punktmasse** bzw. **Punktladung**. Diese kann keine Drehungen, sondern nur fortschreitende Bewegungen ausführen.
Makroskopische Körper lassen sich stets durch ein *System von Punktmassen* bzw. *Punktladungen* darstellen, so z. B. die Gase durch die Gesamtheit der Gasmoleküle oder die festen kristallinen Körper durch die Atome bzw. Ionen des Kristallgitters. Der **starre Körper** kann modellmäßig durch ein System starr gekoppelter Punktmassen aufgefasst werden.

3 Kinematik der Punktmasse

Die *Kinematik* ist die *Lehre von den Bewegungen* der Körper, in der die Ursachen der Bewegungen (die beteiligten Kräfte) sowie die durch sie hervorgerufenen Wirkungen auf andere Körper außer Acht bleiben.

3.1 Raum, Zeit, Bezugssystem

Jeder physikalische Vorgang läuft *in Raum und Zeit* ab. Das ist daraus zu ersehen, dass in allen Bereichen der Physik jedes Gesetz – offen oder verdeckt (explizit oder implizit) – Raum-Zeit-Beziehungen in Form von Längen und Zeitintervallen enthält.
Zur **Längenmessung** dienen Geräte, mit denen sich zwei Abstandsmarken reproduzierbar einstellen lassen, durch deren Entfernung die *Längeneinheit* festgelegt werden kann. Die zu vermessende Strecke wird dann mit der Längeneinheit verglichen und in Vielfachen oder Teilen derselben ausgedrückt.
Die Längeneinheit ist das **Meter (m)**. Die Meter-Definition basiert auf einem festgelegten Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum von 299 792 458 m/s. Sie wurde möglich durch die abso-

lute Messung der Frequenz von Laserstrahlung im sichtbaren Spektralbereich. Da Frequenz f und Wellenlänge λ der Strahlung mit der Lichtgeschwindigkeit c durch die Beziehung $c = f\lambda$ verknüpft sind (vgl. 36.1), kann die hohe Genauigkeit von Frequenzmessungen zur Darstellung der Längeneinheit genutzt werden. Aus dem oben angegebenen Wert für die Lichtgeschwindigkeit folgt als *Meter-Definition*:

Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunde durchläuft.

Für die praktische Handhabung wird die so definierte Längeneinheit auf körperliche Vergleichsmaßstäbe übertragen, die Abstandsmarken tragen (für eine bestimmte Temperatur und weitere genau festgelegte Umgebungsbedingungen). Die Genauigkeit solcher Vergleichsmaßstäbe beträgt einige 10^{-7}, d. h., bezogen auf die Länge von 1 m beträgt der prinzipiell nicht unterschreitbare Fehler in der Längenangabe einige 10^{-7} m.

Eine außerordentlich hohe Genauigkeit und Reproduzierbarkeit besitzen Verfahren zur Längenbestimmung, bei denen als maßverkörperndes Normal die Wellenlänge des Lichts zu Grunde gelegt wird *(optische Interferenzlängenmessung)*. Diese Methode besteht vom Prinzip her im Auszählen von Wellenlängen des zur Messung verwendeten Lichts. Auf diese Weise lässt sich das Meter auf Bruchteile der Lichtwellenlänge ($\approx 10^{-8}$ m) genau vermessen. Bezogen auf die Entfernung Erde–Mond entspricht dies einer Messungenauigkeit von nur wenigen Metern!

Mit Hilfe von *Endmaßen* lassen sich Längen zwischen etwa 0,1 mm und allgemein 0,25 m mit einer Genauigkeit von einigen Zehntel Mikrometer vermessen. Die häufig anzutreffende *Messschraube* („Mikrometerschraube“) gestattet die Messung von Längen zwischen 0,01 mm und meist 25 mm auf etwa 5 µm genau. Mit Hilfe von *Messuhren* mit Taster kann eine Genauigkeit von etwa 1 µm erreicht werden. Beim *Messschieber* erfolgt die Ablesung der Länge auf dem Maßstab mittels *Nonius* (Bild 3.1).

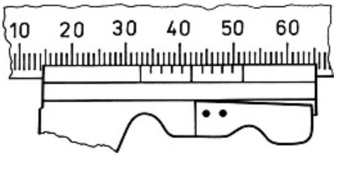

Bild 3.1. Nonius an einer geraden Skala. Ablesung: 32,7.
Die Dezimalstelle 7 ergibt sich daraus, dass der 7. Teilstrich der kurzen Hilfsskala, des Nonius, genau mit einem Teilstrich der Hauptskala zusammenfällt.

Die **Zeitmessung** erfolgt mit Hilfe von *Uhren*. Es handelt sich dabei um Messgeräte, deren Rolle jedes beliebige System erfüllen kann, welches einen zeitlich streng periodischen Vorgang ausführt und mit dessen Hilfe ein Zeitintervall reproduzierbar dargestellt werden kann. Die *Zeiteinheit* ist die **Sekunde (s)**. Ihre Definition geht auf Vorgänge im Atom zurück:

1 Sekunde ist die Dauer von 9 192 631 770 Schwingungsperioden der Strahlung des Atoms Caesium 133.

Das Funktionsprinzip einer *Atomuhr* beruht auf der Wechselwirkung der für die Messung benutzten Strahlungsübergänge im Atom (vgl. 44.2) mit elektromagnetischen Hochfrequenzfeldern, die von einem Hilfsgenerator erzeugt werden, unter Ausnutzung der *Resonanz* bei Übereinstimmung der Frequenzen von Strahlungsfeld und Hochfrequenzfeld. Der Caesium-Frequenz-Standard hat eine Genauigkeit von 10^{-14}, das entspricht einer Abweichung von 1 s in 10^{14} s $\approx$ 3 Millionen Jahren.

Durch geeignete Mittelung der Anzeigen mehrerer Atomuhren wird nach internationaler Übereinkunft für die physikalische Zeitmessung die *internationale Atomzeit* (IAT) festgelegt (SI-Sekunden-Definition). Aus astronomischen Ereignissen folgt eine *Weltzeit* UT (universal time), die aus der Erdrotation abgeleitet wird und für astronomische Beobachtungen sowie für die Navigation nach Himmelskörpern maßgebend ist. Die Atomzeit hat langfristig gegen die Weltzeit eine Abweichung, die bei Erreichen einer Sekunde durch Einschieben oder Auslassen einer „Schaltsekunde“ ausgeglichen wird.

Relativität der Bewegungen. Jede Bewegung ist eine im Zeitablauf erfolgende Ortsveränderung eines Körpers *relativ zu anderen, willkürlich als ruhend angenommenen Körpern* der Umgebung, die das **Bezugssystem** bilden. Meist wird stillschweigend angenommen, dass der Beobachter stillsteht, das Bezugssystem also ruht. Registriert der Beobachter, dass sich in seiner Umgebung ein Körper bewegt, so kann er ohne Orientierung an anderen Körpern der Umgebung (d.h. ohne Zuhilfenahme eines Bezugssystems) nicht entscheiden, ob er sich selbst bewegt oder der Körper. Man denke hierbei nur an die bekannte Täuschung, der man immer wieder unterliegt, wenn man aus einem stillstehenden Eisenbahnabteil heraus auf einen anfahrenden Zug blickt. Wenn man sich nicht z. B. am Bahnsteig orientiert, hat man den Eindruck, der eigene Zug setze sich in Bewegung. Fahren beide Züge gleich schnell nebeneinander her, so sieht es für den Mitfahrenden aus, als stünden beide Züge still. Wir erkennen daraus:

Wie jede Bewegung ist auch der Zustand der Ruhe relativ.

Da zur vollständigen Bestimmung der Lage eines Körpers relativ zu den Körpern der Umgebung (dem Bezugssystem) im Allgemeinen die Angabe von drei Längen nötig ist, wird mit dem Bezugssystem ein *dreidimensionales Koordinatensystem* verknüpft. Meist wählt man ein kartesisches System, in welchem die drei Koordinatenachsen aufeinander senkrecht stehen. Die Gesamtheit aller durch die Koordinatentripel (x, y, z) gegebenen Punkte wird als **Raum** bezeichnet.

3.2 Die gleichförmige Bewegung

Es werde die Bewegung eines Teilchens (Punktmasse) längs einer Geraden, die durch eine Führungsschiene realisiert werden kann, betrachtet. Diese Gerade lassen wir mit der x-Achse unseres Bezugssystems zusammenfallen, so dass die Lage des Teilchens durch Angabe der entsprechenden Koordinate x bestimmt ist. Zur Beschreibung der Bewegung des Teilchens genügt es offenbar, wenn man zu jedem Zeitpunkt t seine Lage x bzw. den gegenüber einem beliebig wählbaren Bezugspunkt x_0 zurückgelegten *Weg* $x - x_0 = s$, d. h. das **Weg-Zeit-Gesetz** $s = s(t)$, kennt.
Werden in gleichen Zeitabschnitten stets gleich große Wegstrecken zurückgelegt, sprechen wir von einer **gleichförmigen Bewegung**, und wenn die Bewegung überdies auf gerader Bahn erfolgt, von einer *geradlinig gleichförmigen Bewegung*. Bei dieser einfachsten aller Bewegungsformen ist der zurückgelegte Weg s der verstrichenen Zeit t direkt proportional: $s \sim t$. Man erhält also als Weg-Zeit-Gesetz die einfache Beziehung

$$s = vt \qquad \text{mit} \qquad v = \text{const.} \tag{1}$$

Den Proportionalitätsfaktor v nennt man die **Geschwindigkeit** der gleichförmigen Bewegung; sie berechnet sich als *Quotient aus dem zurückgelegten Weg und der dazu benötigten Zeit* zu

$$v = \frac{s}{t} \qquad \textbf{(Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung).} \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich die Einheitengleichung

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{1\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 1\,\text{m/s} \;\equiv\; 1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}.$$

Trägt man wie in Bild 3.2a die zurückgelegte Wegstrecke s als Ordinate und die zugehörige Zeit t als Abszisse auf, so erhält man das **Weg-Zeit-Diagramm** der Bewegung. In diesem wird gemäß Gleichung (1) die gleichförmige Bewegung durch eine steigende Gerade beschrieben, deren Anstieg die (konstante) Geschwindigkeit v kennzeichnet. Ist nämlich s_1 der nach Ablauf der Zeit t_1 und s_2 der nach Ablauf der Zeit t_2 zurückgelegte Weg, so gilt $s_1/t_1 = s_2/t_2 = v =$ const. Die Geschwindigkeit kann daher – wie man aus dem Bild entnimmt – auch durch den konstanten *Differenzenquotienten*

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

beschrieben werden.

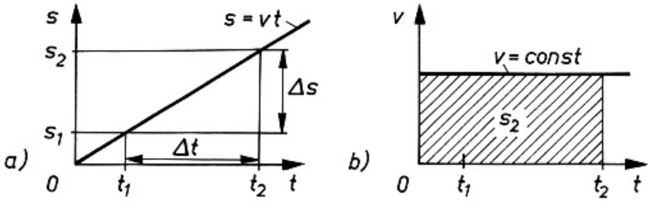

Bild 3.2. Bewegungsdiagramme der gleichförmigen Bewegung:
a) Weg-Zeit-Diagramm $s = s(t)$; b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm $v = v(t)$;
der schraffierte Flächeninhalt entspricht dem durchlaufenen Weg s.

Der Weg s geht in anschaulicher Weise aus dem **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** (Bild 3.2b) hervor, das die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit $v = v(t)$ abbildet. In ihm wird nach (1) die gleichförmige Bewegung durch eine Gerade parallel zur t-Achse beschrieben. Da der Flächeninhalt unter der Geraden für eine vorgegebene Zeit t zahlenmäßig gleich dem Produkt vt ist, gibt dieser daher den in der Zeit t zurückgelegten Weg an (in Bild 3.2b den Weg $s_2 = vt_2$). Dies gilt auch bei beliebiger Abhängigkeit $v = v(t)$; vgl. die Bilder 3.3 und 3.4b.

Beispiel: Ein Fahrzeug legt die erste Hälfte einer vorgegebenen Strecke mit der Geschwindigkeit $v_1 = 30$ km/h und die zweite Hälfte mit der Geschwindigkeit $v_2 = 50$ km/h zurück. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit wird die gesamte Strecke zurückgelegt? – *Lösung:* Ist der Gesamtweg gleich $2s$, so ist nach (2) $v_1 = s/t_1$ und $v_2 = s/t_2$. Die Gesamtfahrzeit beträgt daher $t_1 + t_2 = s/v_1 + s/v_2$ und somit die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 37{,}5 \text{ km/h} \qquad \textit{(harmonisches Mittel),}$$

also nicht etwa 40 km/h (arithmetisches Mittel).

3.3 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei allen Bewegungsvorgängen wird eine bestimmte Geschwindigkeit nicht sprunghaft, sondern allmählich erreicht (z. B. Anfahrvorgänge). Das Gleiche trifft auf Abbremsvorgänge zu, bei denen die Geschwindigkeit ständig abnimmt. Derartige Bewegungen, bei denen sich die Geschwindigkeit *zeitlich ändert*, nennt man *beschleunigt*. Eine Bewegung, bei der die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um denselben Betrag wächst oder abnimmt, heißt **gleichmäßig beschleunigt.** Bei ihr ist die Geschwindigkeits*änderung* Δv der verstrichenen Zeitspanne Δt direkt proportional:

$$\Delta v = a\Delta t \qquad \text{mit} \qquad a = \text{const.} \tag{3}$$

Wird der Körper nicht aus der Ruhelage heraus beschleunigt, sondern hat er zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ (d. h. zu Beginn der Zeitzählung, z. B. bei Verwendung einer Stoppuhr) bereits eine bestimmte *Anfangsgeschwindigkeit* v_0, dann ist, wenn v die *Endgeschwindigkeit* nach Ablauf der Zeit t ist, die Geschwindigkeitsänderung im Zeitintervall $\Delta t = t - t_0 = t$ wegen (3) gleich $\Delta v = v - v_0 = at$ und somit

$$v = at + v_0 \qquad \textbf{(Endgeschwindigkeit).} \tag{4}$$

Die konstante Größe a heißt **Beschleunigung**; sie ist demnach gleich dem *Quotienten aus der Geschwindigkeitsänderung und der dazu benötigten Zeit:*

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \qquad \textbf{(Beschleunigung bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung).} \tag{5}$$

$$\textit{Einheit:} \quad [a] = \frac{[v]}{[t]} = 1\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \equiv 1\,\text{m}\,\text{s}^{-2}.$$

Wenn die Geschwindigkeit abnimmt ($\Delta v < 0$), hat a die Bedeutung einer **Verzögerung**; ihr Zahlenwert erhält dann negatives Vorzeichen ($a < 0$).
Als Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm erhält man nach Gleichung (4) für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eine steigende, für die gleichmäßig verzögerte Bewegung eine fallende Gerade, deren Anstieg durch die konstante Beschleunigung a und deren Ordinatenabschnitt durch die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben ist (Bild 3.3).

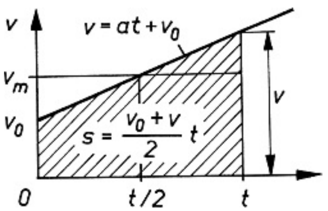

Bild 3.3. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.
Die schraffierte Fläche gibt zahlenmäßig den zurückgelegten Weg an. v_{m} ist die mittlere Geschwindigkeit.

Die schraffiert gezeichnete Fläche unter der v,t-Geraden, welche die Gestalt eines Trapezes hat, ist – wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben – zahlenmäßig gleich dem Weg s. Dieser berechnet sich somit zu

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t = v_{\mathrm{m}} t. \tag{6}$$

$v_{\mathrm{m}} = s/t = (v_0 + v)/2$ gibt dabei die **mittlere Geschwindigkeit** an; bei dieser Geschwindigkeit wird während der Zeit t in *gleichförmiger* Bewegung die gleiche Wegstrecke zurückgelegt wie in gleichmäßig beschleunigter Bewegung von v_0 auf v. Nach Einsetzen von v gemäß Gleichung (4) in Gleichung (6) erhält man

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t \qquad \textbf{(Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung).} \tag{7}$$

Ersetzt man hingegen in (6) nach Gleichung (4) die Zeit $t = (v - v_0)/a$, so folgt nach Umstellung

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} \qquad \textbf{(Endgeschwindigkeit).} \tag{8}$$

Aus den allgemein gültigen Gleichungen (4) bis (8) lassen sich nun bestimmte **Sonderfälle** ableiten. So ist beim *Start aus der Ruhelage* $v_0 = 0$ zu setzen. Beim *Abbremsen bis zum Stillstand* ist die Endgeschwindigkeit $v = 0$, womit sich aus (4) die Anfangsgeschwindigkeit bei gegebener Bremszeit zu $v_0 = -at$ und aus (8) der Bremsweg zu $s = -v_0^2/(2a)$ oder die Anfangsgeschwindigkeit bei gegebenem Bremsweg zu $v_0 = \sqrt{-2as}$ ergeben. Die Minuszeichen verschwinden beim Einsetzen des Wertes für die Beschleunigung a, der hier negativ ist. In Bild 3.4 sind die Bewegungsdiagramme für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung zusammengestellt.

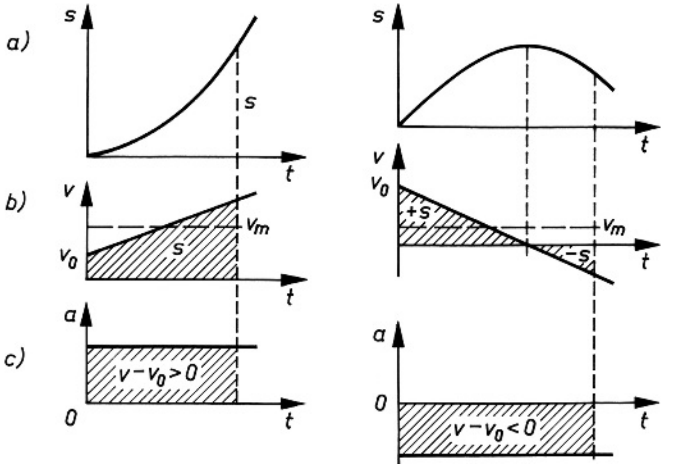

Bild 3.4. Bewegungsdiagramme für $a > 0$ (links) und $a < 0$ (rechts):
a) Weg-Zeit-Diagramm bzw. Ort-Zeit-Diagramm $s = s(t)$
b) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm $v = v(t)$
c) Beschleunigung-Zeit-Diagramm $a = a(t)$

Für $a < 0$ weist $s = s(t)$ in Bild 3.4a (rechts) ein Maximum auf, das einem Umkehrpunkt der Bewegung entspricht. Die einzelnen s-Werte werden nach Erreichen des Maximums in umgekehrter Richtung noch einmal durchlaufen, wobei die Geschwindigkeit jetzt negative Werte annimmt (Bild 3.4b (rechts)). $s = s(t)$ stellt in diesem Falle nicht den in einer bestimmten Zeit insgesamt zurückgelegten Weg dar, sondern die *momentane Entfernung zum Bezugspunkt*, was gleichbedeutend mit der *Ortskoordinate* des Körpers zur Zeit t ist. Dementsprechend bezeichnet man das s,t-Diagramm für $a < 0$ in Bild 3.4a auch als **Ort-Zeit-Diagramm**. Den vom Körper insgesamt zurückgelegten Weg erhält man durch Addition der Beträge der im v,t-Diagramm Bild 3.4b (rechts) schraffiert gezeichneten Flächen. Vergleiche dazu das Beispiel zum senkrechten Wurf in Abschnitt 3.4.

Beispiel: Der Fahrer eines mit 80 km/h fahrenden Pkw bemerkt plötzlich in 60 m Entfernung auf der Straße ein Hindernis, worauf er seinen Wagen mit der maximal möglichen Verzögerung von $a = -5$ m/s^2 abbremst. a) Wie viel Sekunden nach Einsetzen des Bremsvorgangs und wie viel Meter vor dem Hindernis kommt der Wagen zum Stehen? b) Mit welcher Geschwindigkeit prallt der Wagen auf, wenn er anfänglich mit 90 km/h gefahren wird? – *Lösung:* a) Bekannt sind die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = (80/3{,}6)$ m/s $= 22{,}2$ m/s, die Endgeschwindigkeit $v = 0$ und die Beschleunigung a. Aus (4) folgt damit die Bremszeit $t = -v_0/a \approx 4{,}5$ s. Für den Bremsweg ergibt sich aus (8) $s = -v_0^2/(2a) = 49{,}3$ m; der Wagen kommt also 10,7 m vor dem Hindernis zum Stehen. b) Mit $s = 60$ m und $v_0 = (90/3{,}6)$ m/s $=$ 25 m/s folgt nach (8) für die Aufprallgeschwindigkeit $v = 5$ m/s $= 18$ km/h.

Aufgabe 3.1. Um wie viel Meter vergrößert sich im obigen Beispiel die Strecke für den Anhaltevorgang gegenüber dem Bremsweg, wenn die Reaktionszeit des Fahrers bis zum Beginn des Bremsvorganges von $t_R = 0{,}8$ s berücksichtigt wird? Kommt es jetzt bei $v_0 = 80$ km/h zum Aufprall? Wenn ja, mit welcher Geschwindigkeit?

Aufgabe 3.2. Ein Kurzstreckenläufer legt die Strecke von 100 m in der Zeit von 10,5 s zurück. Während der ersten 20 m beschleunigt er dabei gleichmäßig und läuft den Rest der Strecke mit konstanter Geschwindigkeit. Wie groß sind die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit des Läufers? Stelle den Lauf in einem v,t- sowie in einem s,t-Diagramm dar!

3.4 Freier Fall. Senkrechter Wurf

Das wohl bekannteste Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der **freie Fall**. Ursache der Fallbewegung eines Körpers ist die Anziehungskraft der Erde. GALILEI (1564–1642) erkannte als Erster, dass *alle Körper mit der gleichen Beschleunigung* zum Mittelpunkt der Erde *fallen*, wenn der Einfluss des Luftwiderstandes vernachlässigt wird (Bild 3.5). Anhand sorgfältiger und für seine Zeit genauer Experimente konnte er zeigen, dass die Wege, die von einem Körper in 1, 2, 3, 4 ... Zeiteinheiten (z. B. Sekunden) durchfallen werden, sich wie 1 : 4 : 9 : 16 : ... verhalten, d. h., *die Fallhöhe ist dem Quadrat der Fallzeit proportional (Fallgesetz).*

So fällt ein Körper in Luft in der ersten Sekunde etwa 4,9 m und in jeder folgenden jeweils um das Doppelte dieses Wertes, also ungefähr um 9,8 m, mehr als in der vorangegangenen Sekunde. Die gesamte Fallhöhe, ausgedrückt in Metern, beträgt also

$$h = 4{,}9 + (4{,}9 + 9{,}8) + (4{,}9 + 2 \cdot 9{,}8) + \cdots + [4{,}9 + (t-1) \cdot 9{,}8],$$

wenn t die Anzahl der Sekunden angibt. Wir haben also t Summanden, die sich als Summe einer arithmetischen Reihe wie folgt zusammenfassen lassen:

$$h = 4{,}9\,t + \frac{9{,}8\,t(t-1)}{2} = \frac{9{,}8}{2}t^2.$$

Dies ist das quadratische Zeitgesetz des freien Falls mit dem speziellen Wert 9,8 m/s^2 für die **Fallbeschleunigung** oder **Schwerebeschleunigung**, die mit dem Buchstaben g (von lat. „gravitas“, die Schwere) bezeichnet wird.

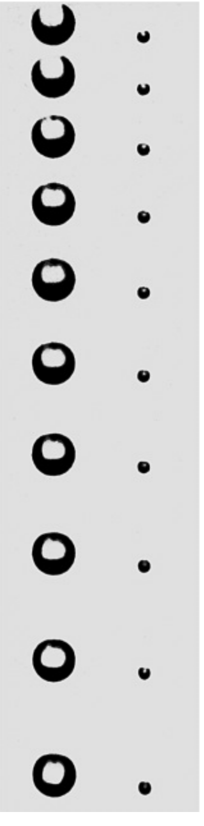

Bild 3.5. Stroboskopische Aufnahme von zwei frei fallenden Kugeln ungleicher Masse. Sie wurde hergestellt, indem bei geöffneter Blende in Abständen von 1/100 s mit Blitzlicht beleuchtet wurde. Man beachte, dass die leichte Kugel genauso schnell fällt wie die schwere Kugel.

Dieses Gesetz folgt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und dem genauen Wert der experimentell zu bestimmenden Fallbeschleunigung $a = g$, der innerhalb nicht allzu großer Höhenunterschiede konstant ist, unmittelbar auch aus (7):

$$h = \frac{g}{2}t^2 \qquad \textbf{(Fallhöhe).} \tag{9}$$

Aus (8) erhält man die Endgeschwindigkeit nach Durchfallen der Höhe h:

$$v = \sqrt{2gh} \qquad \textbf{(Fallgeschwindigkeit).} \tag{10}$$

Der Wert für die Fallbeschleunigung g kann z. B. mittels genauer Messungen der Fallzeit für eine vorgegebene Höhe nach Gleichung (9) $g = 2h/t^2$ bestimmt werden. Genauere Messungen sind mit Hilfe von *Pendeln* möglich (vgl. A.2 im *Anhang*). Infolge der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt und wegen der Erddrehung ist g von der geographischen Breite abhängig (s. 5.2). Für Orte um den 50. Breitenkreis und niedrige Höhenlagen erhält man $g \approx 9{,}81$ m/s^2. Als *Normwert* wurde der Wert für 45° nördlicher Breite und Meereshöhe vereinbart:

$$g_\mathrm{n} = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2} \qquad \textbf{(Normfallbeschleunigung).}$$

Beispiel: Bestimme aus Bild 3.5 den Wert der Fallbeschleunigung g! – *Lösung:* Die Ausmessung der Abstände aufeinander folgender Positionen der frei fallenden Kugeln ergibt, dass in jeweils einer hundertstel Sekunde ($\Delta t = 10^{-2}$ s) die zurückgelegten Wege jedes Mal um $\Delta s \approx 1$ mm zunehmen. Die Geschwindigkeitszunahme zwischen zwei aufeinander folgenden Belichtungen beträgt also $\Delta v = \Delta s/\Delta t \approx 0{,}1$ m/s, woraus für die Beschleunigung folgt $a = \Delta v/\Delta t \approx 10$ m/s$^2 \approx g$.

Der senkrechte Wurf. Beim senkrechten Wurf eines Körpers ist der gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung eine *gleichförmige* Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 überlagert. Die resultierende Bewegung ist ebenfalls gleichmäßig beschleunigt. Beim senkrechten Wurf **nach unten** hat v_0 dieselbe Richtung wie die Fallbewegung; es gelten daher für ihn die allgemeinen Bewegungsgesetze (4), (7) und (8) mit $a = g$ in unveränderter Form. Beim senkrechten Wurf **nach oben** ist demgegenüber zu beachten, dass die Fallbeschleunigung g als *Verzögerung* wirkt und daher negativ anzusetzen ist. Damit ergibt sich aus (4) die Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t zu

$$v = v_0 - gt, \tag{11}$$

aus (7) die Wurfhöhe nach der Zeit t zu

$$h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \tag{12}$$

und aus (8) die Geschwindigkeit in der Höhe h zu

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \tag{13}$$

Bei einer vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreicht der Körper eine bestimmte maximale Höhe h_max. In dieser Höhe ist er für einen Augenblick in Ruhe ($v = 0$), um danach frei nach unten zu fallen. Für den Gipfelpunkt gilt daher $0 = \sqrt{v_0^2 - 2gh_\mathrm{max}}$, woraus folgt

$$h_\mathrm{max} = \frac{v_0^2}{2g} \qquad \textbf{(maximale Wurfhöhe).} \tag{14}$$

$v_0 = \sqrt{2gh_\mathrm{max}}$ ist diejenige Geschwindigkeit, die dem Körper erteilt werden muss, damit er die Höhe h_max gerade erreicht. Wie man sieht, ist sie der Geschwindigkeit (10) gleich, die der Körper erhält, wenn er aus der Höhe h_max frei zu Boden fällt.

Beispiel: Ein Körper werde mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20$ m/s senkrecht nach oben geworfen. Bis zu welcher Höhe steigt er maximal? Nach welcher Zeit hat er seine Anfangslage wieder erreicht? ($g \approx 10$ m/s^2). Wurfhöhe h, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a sind in Abhängigkeit von der Zeit graphisch darzustellen. – *Lösung:* Nach (14) ist $h_\mathrm{max} = 20$ m. Die *Steigzeit* t_1 erhält man aus (11) mit der Bedingung $v = 0$ zu $t_1 = v_0/g = 2$ s. Der Körper kommt also nach $t_2 = 2t_1 = 4$ s wieder am Boden an. Entsprechend Gleichung (7) bzw. (12) wird die gleichmäßig beschleunigte Bewegung im Ort-Zeit-Diagramm durch eine *Parabel* beschrieben. In unserem Beispiel ist die Parabel wegen des negativen Vorzeichens der Beschleunigung nach unten geöffnet (Bild 3.6a). Das Maximum liegt an der Stelle $t = t_1$ bei $h = h_{max}$. Im v,t-Diagramm (Bild 3.6b) ergibt sich gemäß Gleichung (11) eine fallende Gerade mit dem Ordinatenabschnitt $v = v_0$ bei $t = 0$ und der Ordinate $v = -v_0$ bei $t = t_2 = 2t_1$. Sie veranschaulicht die verzögerte Bewegung während der Aufstiegsphase bis zum Stillstand ($v = 0$) zum Zeitpunkt t_1 und die anschließende beschleunigte Bewegung in umgekehrter Richtung (Abstiegsphase mit negativer Geschwindigkeit). Wegen der auf den Körper wirkenden konstanten Fallbeschleunigung $a = -g$ ergibt sich im a,t-Diagramm (Bild 3.6c) eine Gerade parallel zur t-Achse. Auch im höchsten Punkt der Flugbahn, wo die Geschwindigkeit gleich null ist, behält die Beschleunigung ihren Wert $a = -g$; denn „Beschleunigung" bedeutet Geschwindigkeits*änderung*, und im höchsten Punkt erfolgt die Änderung der Geschwindigkeit von positiven zu negativen Werten.

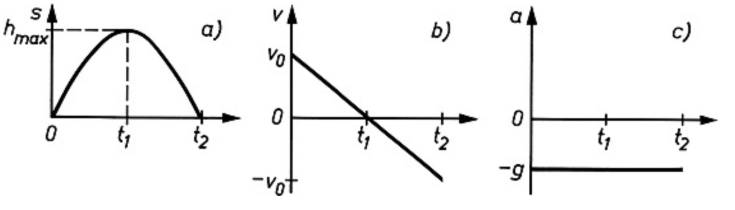

Bild 3.6. Senkrechter Wurf nach oben: Ort-Zeit-Diagramm (a), Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (b) und Beschleunigung-Zeit-Diagramm (c)

Aufgabe 3.3. Von einer 100 m hohen Plattform eines Aussichtsturmes wird ein Körper mit $v_0 = 15$ m/s senkrecht nach oben geworfen. a) Wie groß ist die Gipfelhöhe über dem Erdboden, und wann wird sie erreicht? b) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit trifft der Körper am Erdboden auf? Luftwiderstand wird vernachlässigt.

3.5 Allgemeine Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Wie aus den Bildern 3.4a und 3.6a hervorgeht, wird die beschleunigte Bewegung im Weg-Zeit-Diagramm durch eine *gekrümmte* Kurve $s = s(t)$ beschrieben. Im Gegensatz zur gleichförmigen Bewegung, für die man im s,t-Diagramm wegen der konstanten Geschwindigkeit eine Gerade erhält, ist daher für die beschleunigte Bewegung die Definition der Geschwindigkeit als Differenzenquotient $\Delta s/\Delta t$ wie in Abschnitt 3.2 nicht mehr ausreichend; denn dieser gibt – wie man aus Bild 3.7 ersehen kann – nur eine *mittlere (durchschnittliche)* Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an, entsprechend dem Anstieg der *Sekante* durch die Kurvenpunkte P_1 und P_2.

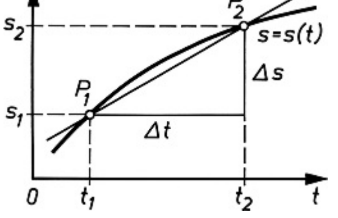

Bild 3.7. Zur Definition der Geschwindigkeit bei beschleunigter Bewegung

Um die **Momentangeschwindigkeit** $v(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t, z. B. $t = t_1$, zu erhalten, ist es erforderlich, den Anstieg der *Tangente* an die Weg-Zeit-Kurve im zugehörigen Kurvenpunkt P_1 zu bestimmen. Dies geschieht dadurch, dass das Zeitintervall Δt (und damit zugleich auch das Wegintervall Δs) verschwindend klein gewählt wird. Durch diesen

Grenzübergang wird der Differenzenquotient $\Delta s/\Delta t$ zum Differentialquotienten $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, der dann die Geschwindigkeit im betreffenden Zeitpunkt angibt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{s}. \tag{15}$$

Die allgemeine Definition der Geschwindigkeit lautet somit:

Die Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Analog ist bei der Bestimmung der Beschleunigung zu verfahren, wenn die Bewegung *ungleichmäßig beschleunigt* ist. Denn in diesem Fall ist der Geschwindigkeits*zuwachs* Δv in gleichen Zeitintervallen Δt verschieden groß, d. h., die Beschleunigung ändert sich dauernd, weshalb diese Bewegung im v,t-Diagramm nicht wie bei gleichmäßiger Beschleunigung durch eine Gerade, sondern durch eine gekrümmte Kurve beschrieben wird. Daher gibt hier der Differenzenquotient (5) $\Delta v/\Delta t$ nur eine *durchschnittliche* Beschleunigung im Zeitintervall Δt an. Die **Momentanbeschleunigung** $a(t)$ erhält man wie oben durch Grenzübergang zu

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{v} \tag{16}$$

oder mit (15) zu

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{s}. \tag{17}$$

Die Beschleunigung ist gleich dem Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit oder gleich dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Mit Hilfe dieser Definitionen für Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich die oben behandelten Gesetze der *gleichmäßig* beschleunigten Bewegung durch Anwendung der Integralrechnung auf analytischem Wege herleiten. So folgt zunächst aus (16) durch Umstellung $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$ und hieraus mit $a = \text{const}$:

$$v = \int \mathrm{d}v = \int a\,\mathrm{d}t = a\int \mathrm{d}t = at + C.$$

Die Integrationskonstante C bestimmt man aus der **Anfangsbedingung**, dass der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit $v = v_0$ haben soll. Durch Einsetzen dieser Werte für t und v folgt aus vorstehender Gleichung $C = v_0$, womit sich die bekannte Beziehung (4) $v = at + v_0$ ergibt. Mit (15) wird hieraus

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at + v_0; \quad s = \int (at + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + C'.$$

Nehmen wir an, dass die zur Zeit $t = 0$ zurückgelegte Wegstrecke gleich s_0 ist, so folgt durch Einsetzen $C' = s_0$. Lassen wir hingegen die Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$ erst beginnen, d. h. $s_0 = 0$, so ist auch C' gleich null, und es folgt das Weg-Zeit-Gesetz (7).

Beispiele: *1.* Bei einer geradlinigen Bewegung werden nach 1, 2, 3 ... Sekunden 1, 8, 27 ... Meter zurückgelegt. Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung nach der 1., 2. und 3. Sekunde? – *Lösung:* Wir entnehmen, dass s der dritten Potenz von t proportional ist, d. h., es gilt $s = kt^3$. Die Konstante k erhält man durch Einsetzen zusammengehöriger Werte von t und s zu $k = 1\ \mathrm{m/s^3}$. Nach (15) folgt damit als Geschwindigkeit $v(t) = 3kt^2$ und nach (16) als Beschleunigung $a(t) = 6kt$. Einsetzen von k ergibt $v(t) = 3t^2\ \mathrm{m/s^3}$; $a(t) = 6t\ \mathrm{m/s^3}$. Für $t = 1, 2, 3$ s erhält man $v = 3, 12, 27$ m/s und $a = 6,\ 12,\ 18\ \mathrm{m/s^2}$.

2. Die Geschwindigkeit einer senkrecht aufsteigenden Rakete zum Zeitpunkt t nach dem Start beträgt nach Gleichung (9/20):

$$v(t) = c \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} - gt = -c \ln\left(1 - \frac{\dot{m}}{m_0}t\right) - gt.$$

Dabei ist c die konstante Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase aus dem Triebwerk, $\dot{m}$ der zeitlich konstante Treibstoffverbrauch, gemessen in Kilogramm je Sekunde, und m_0 die Startmasse der Rakete. Wie groß sind Startbeschleunigung und Endbeschleunigung der Rakete, wenn $c = 3000$ m/s, $\dot{m}/m_0 = 10^{-2}$ /s und die Brenndauer des Treibsatzes $t_E = 25$ s beträgt? – *Lösung:* Aus obiger Gleichung für $v(t)$ erhält man durch Differentiation nach der Zeit

$$a(t) = \frac{c\,(\dot{m}/m_0)}{1 - (\dot{m}/m_0)t} - g.$$

Für $t = 0$ folgt hieraus als Startbeschleunigung $a(0) = c\,(\dot{m}/m_0) - g = 20$ m/s$^2 \approx 2g$ und für $t = t_E = 25$ s als Endbeschleunigung $a(t_E) = 30$ m/s$^2 \approx 3g$.

Aufgabe 3.4. Ein Elektron bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 600$ km/s geradlinig im Vakuum. Vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ an wird es durch ein mit der Zeit linear anwachsendes Gegenfeld mit einer Verzögerung $a = -kt$ abgebremst ($k = 3 \cdot 10^{19}$ m/s^3). a) Bestimme Weg und Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit allgemein! b) Zu welchem Zeitpunkt nach t_0 kehrt sich die Bewegungsrichtung des Elektrons um? c) Welchen Weg hat es bis dahin im Gegenfeld zurückgelegt?

3.6 Geschwindigkeit und Beschleunigung als Vektoren. Zusammengesetzte Bewegungen (Superposition)

Vektoren. Zur eindeutigen Bestimmung einer Geschwindigkeit gehört außer der Angabe ihres Zahlenwertes nebst Einheit die Angabe der *Richtung*. Gleiches gilt für die Beschleunigung. Derartige gerichtete Größen heißen *Vektoren*, im Gegensatz zu den ungerichteten *Skalaren*, wie z. B. der Zeit, der Temperatur und der Dichte. Vektoren stellt man durch Pfeile in der entsprechenden Richtung dar, deren Länge gleich so viel willkürlich gewählten Längeneinheiten ist, wie der Zahlenwert der betreffenden Größen angibt. Der Zahlenwert zusammen mit der Einheit eines Vektors heißt sein *Betrag*. Zwei vektorielle Größen sind nur dann gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
Vektorielle Größen werden durch *fettgedruckte* lateinische Buchstaben gekennzeichnet, z. B. $\boldsymbol{v}$ für den Geschwindigkeitsvektor. Üblich ist auch die Kennzeichnung durch gewöhnliche Buchstaben mit einem darübergesetzten Pfeil (z. B. $\vec{v}$), wie sie in den Bildern dieses Buches verwendet wird.

Überlagerung von Bewegungen. Führt ein Körper zwei Bewegungen *gleichzeitig* aus (z. B. ein Boot, das über den Fluss setzt und dabei infolge der Strömung des Flusses abgetrieben wird), so setzen sich die beiden Teilbewegungen (Bewegung des Bootes in Bezug auf den Fluss und Bewegung des Flusses in Bezug auf das Ufer) zur Gesamtbewegung (Bewegung des Bootes gegenüber dem Ufer) so zusammen, als ob sie zeitlich nacheinander stattfinden würden. Man nennt dies das *Prinzip der ungestörten Superposition* (Überlagerung) oder auch das *Unabhängigkeitsprinzip*.
Danach ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ der aus zwei Teilbewegungen zusammengesetzten Bewegung als Diagonale des Parallelogramms, das aus den Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ der Teilbewegungen gebildet wird (Bild 3.8). Nach den Regeln der Vektorrechnung ist diese gleich der *Vektorsumme*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \qquad \textbf{(resultierende Geschwindigkeit).} \tag{18}$$