

**Definitionslücken  $x_p$**   
Wann wird das Nennerspolynom Null?  
 $N(x_p) = 0$   
 $x_p$  ist keine Nullstelle des Zählerspolynoms  $Z(x_p) \neq 0$   
 $x \rightarrow x_p$   
 $x_p$  ist auch Nullstelle des Zählerspolynoms  $Z(x_p) = 0$

**Pole ungerader Ordnung**  
Das Nennerspolynom hat an der Stelle  $x_p$  eine Nullstelle mit ungerader Vielfachheit.  
Der Graph von  $f$  wechselt an der Stelle  $x_p$ , das Vorzeichen nicht (kein VZW).  
Die Funktion  $f$  hat an der Stelle  $x = 3$  einen Pol 1. Ordnung.  
Senkrechte Asymptote  $x = 3$

**Pole gerader Ordnung**  
Das Nennerspolynom hat an der Stelle  $x_p$  eine Nullstelle mit gerader Vielfachheit.  
Der Graph von  $f$  wechselt an der Stelle  $x_p$ , das Vorzeichen nicht (kein VZW).  
Die Funktion  $f$  hat an der Stelle  $x = 3$  einen Pol 2. Ordnung.  
Senkrechte Asymptote  $x = 3$

Zählerpolynom  $Z(x)$  und Nennerspolynom  $N(x)$  enthalten den gemeinsamen Linearfaktor  $(x - x_p)$ . Der Funktionsterm wird so weit wie möglich gekürzt, ggf. in das eine Faktorisierung von  $Z(x)$  und  $N(x)$  nötig (= Wissenskarte Algebra).

Beispiel 1  
 $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-3)}$   
 $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$   
 Tritt im Nenner noch der Linearfaktor  $(x - x_p)$  auf?  
 Ja (Beispiel 1) → stetig fortsetzbare Definitionslücke  
 Nein (Beispiel 2) → Pole

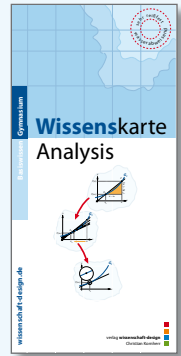
Beispiel 2  
 $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-5)}$   
 $f(x) = \frac{x-2}{x-5}$   
 An der Stelle  $x = 3$  hat  $G_f$  eine stetig fortsetzbare Definitionslücke.

# Wissenskarte Analysis

Basiswissen Gymnasium, ISBN 978-3-940838-13-1

Die gesamte Analysis auf einer Landkarte im Format DIN A1.

Die Wissenskarte präsentiert die zentralen Themen Grenzwertrechnung, Differenzial- und Integralrechnung in 27 übersichtlichen Lernkästen. Der Leser kann sich anhand von Pfeilen auf der Wissenskarte orientieren, Zusammenhänge selbst erforschen und die Theorie nach den Regeln der Lernpsychologie effektiv im Grundwissen verankern. So eignet sich die Wissenskarte ideal für die **Prüfungsvorbereitung in der Oberstufe** oder für Studienanfänger zum **Auffrischen des Abiturstoffs**.



## 1. Aufgaben zur Ableitung

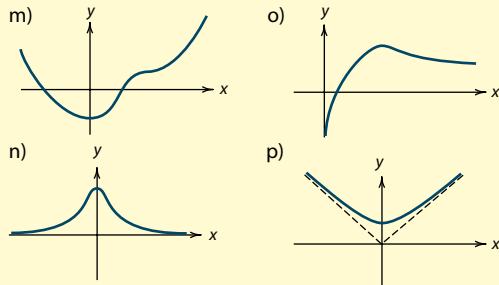
### Leiten Sie ab!

Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen

- a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 2$
- b)  $f(x) = 2x^3 - 5x$
- c)  $f(x) = ax^4 + 2x^3 + a$
- d)  $f(x) = (x^2 + 4) \cdot x$
- e)  $f(x) = \sqrt{x} + 2e^x$
- f)  $f(x) = (1 + 2e^x) \cdot x$
- g)  $f(x) = 3e^{-x}$
- h)  $f(x) = (x + 1)^2$
- i)  $f(x) = 3 \cdot (2x + 1)^2$
- j)  $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
- k)  $f(x) = \frac{2}{(9 + 2x)^2}$
- l)  $f(x) = 2x \sin x \cdot \cos x$

### Graphisches Ableiten

Skizzieren Sie den Graphen  $G_{f'}$  der ersten Ableitung!



### Vom Term $f(x)$ zum Schaubild $G_f$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen  $G_f$ !

- q)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$
- r)  $f(x) = -(x-1)(x+1)$
- s)  $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$
- t)  $f(x) = 2e^{-x}$
- u)  $f(x) = 3 - 2e^{-x}$
- v)  $f(x) = 3 - 2e^{-2x}$

## 3. „Steckbriefaufgaben“

### Übersetzungstafel

Beispiel: Polynom 3. Grades  
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$   
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$   
 $f''(x) = 6ax + 2b$

$P(4|5)$  liegt auf  $G_f$  →  $5 = f(4)$   
 $G_f$  hat Hoch/Tiefpunkt  $P(2|\dots)$  →  $f'(2) = 0$   
 $G_f$  hat Terrassenpunkt  $P(2|\dots)$  →  $f'(2) = 0 \wedge f''(2) = 0$   
 $G_f$  berührt  $x$ -Achse in  $x = 2$  →  $f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$   
 $G_f$  hat in  $P(2|\dots)$  Steigung 3 →  $f'(2) = 3$   
 $G_f$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse →  $f(x) = bx^2 + d$   
 $G_f$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung →  $f(x) = ax^3 + cx$

### Geraden, Tangenten und Normalen

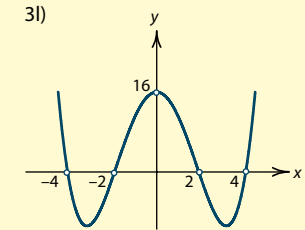
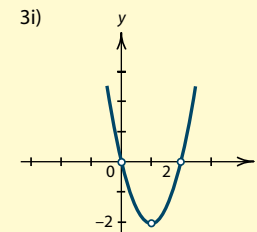
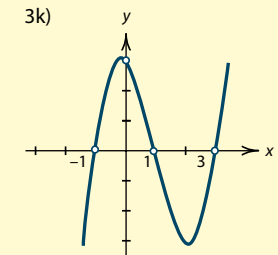
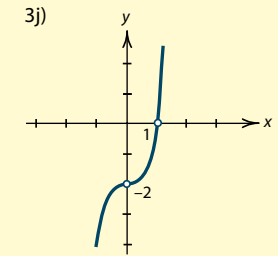
- 3a Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $P(1|3)$  und  $Q(2|4)$ !
- 3b Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente und die Gleichung der Normalen im Punkt  $P(1|\dots)$  an den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ .
- 3c Gegeben sei die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + 4x + 4$ . Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die parallel ist zur Geraden  $g: y = 4x - 1$ .

### Ganzrationale Funktionen

- 3d Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel durch die Punkte  $P(-1|4)$  und  $Q(0|2)$  und  $R(1|1)$ !
- 3e Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Hochpunkt  $P(1|3)$  und dem Achsenschnittpunkt  $Q(0|2)$ !

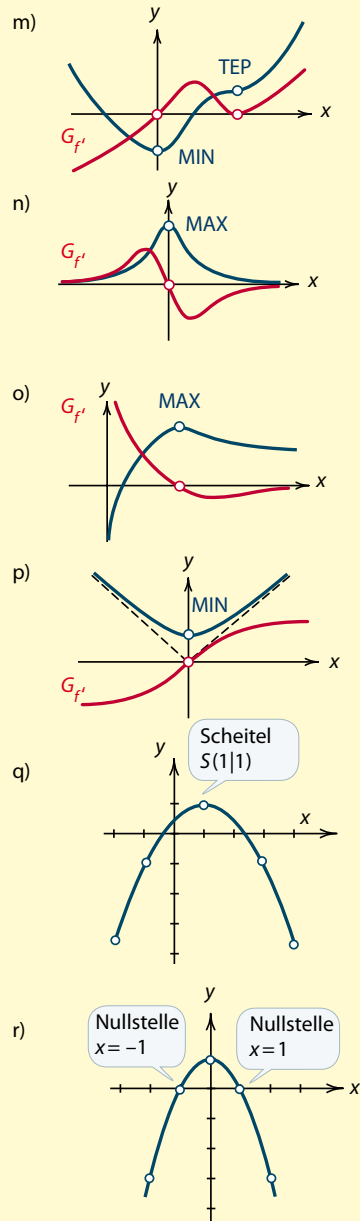
>> Lösungen zu „1. Aufgaben zur Ableitung“ auf Seite 2

- 3f Der Graph einer Funktion 3. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und den Hochpunkt  $P(-2|2)$ . Bestimmen Sie  $f(x)$ !
- 3g Der Graph einer Funktion 3. Grades schneidet die  $y$ -Achse in  $P(0|4)$ , berührt die  $x$ -Achse in  $B(-3|0)$  und schneidet sie im Punkt  $C(4|0)$ . Bestimmen Sie  $f(x)$ !
- 3h Der Graph einer Funktion 3. Grades geht durch den Punkt  $P(0|4)$  und hat den Wendepunkt  $W(-1|1)$ . Die Wendetangente hat die Steigung  $-1$ . Bestimmen Sie  $f(x)$ !

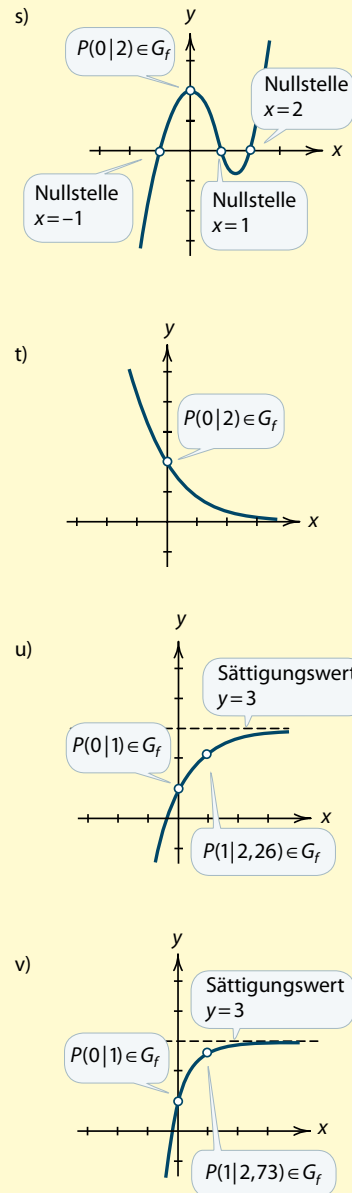


## 1. Aufgaben zur Ableitung

- a)  $f(x) = x^3 - x^2 + 2$   
 $f'(x) = 3x^2 - 2x$
- b)  $f(x) = 2x^3 - 5x$   
 $f'(x) = 6x^2 - 5$
- c)  $f(x) = ax^4 + 2x^3 + a$   
 $f'(x) = 4ax^3 + 6x^2$
- d)  $f(x) = x \cdot (x^2 + 4)$   
 $f'(x) = 1 \cdot (x^2 + 4) + x \cdot 2x = 3x^2 + 4$   
 alternativ:  $f(x) = x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4$
- e)  $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 2e^x$   
 $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2e^x$
- f)  $f(x) = (1 + 2e^x) \cdot x$   
 $f'(x) = 2e^x \cdot x + (1 + 2e^x) \cdot 1 = 1 + 2e^x + 2xe^x$
- g)  $f(x) = 3 \cdot e^{-x}$   
 $f'(x) = 3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -3e^{-x}$
- h)  $f(x) = (x+1)^2$   
 $f'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot 1 = 2x + 2$
- i)  $f(x) = 3 \cdot (2x+1)^2$   
 $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (2x+1) \cdot 2 = 24x + 12$
- j)  $f(x) = \sqrt{2x-1} = (2x-1)^{\frac{1}{2}}$   
 $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
- k)  $f(x) = \frac{2}{(9+2x)^2} = 2 \cdot (9+2x)^{-2}$   
 $f'(x) = 2 \cdot (-2) \cdot (9+2x)^{-3} \cdot 2 = -\frac{8}{(9+2x)^3}$
- l)  $f(x) = 2x \sin x \cdot \cos x$   
 $f'(x) = (2x \sin x)' \cdot \cos x + 2x \sin x \cdot (-\sin x) =$   
 $(2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x) \cdot \cos x - 2x \cdot \sin^2 x =$   
 $2 \sin x \cos x + 2x \cdot \cos^2 x - 2x \sin^2 x$



## Lösungen



## Wissenskarte Analysis

Basiswissen Gymnasium  
 ISBN 978-3-940838-13-1

Besonders hilfreich für Schüler und Studierende ist ein umfangreicher **Funktionenatlas** (60cm x 60cm) mit den in Oberstufe und Studium vorausgesetzten Funktionentypen. Der Funktionenatlas zeigt nicht nur die Schaubilder der Funktionen mit ihren charakteristischen Eigenschaften. Modifikationen des Funktionsterms, wie sie bei Verschiebungen, Spiegelungen und Streckungen auftreten, werden ebenso diskutiert wie symmetrische Spezialfälle ganzrationaler Funktionen, Kurvenscharen und Vieles mehr.

Im Aufgabenteil sind zur Selbstkontrolle die wichtigsten Musteraufgaben mit **ausführlichen Lösungen** im Überblick zusammengestellt.