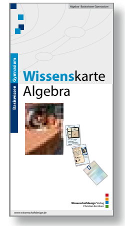
Ausschnitt aus
Wissenskarte Algebra
ISBN 978-3-940838-00-1

Die gesamte Schulalgebra
auf einen Blick!



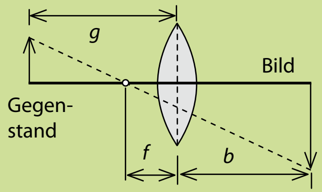
5. Gleichungen

5.2. Formeln

Lösen Sie die Formeln nach den in eckigen Klammern gegebenen Größen auf und benennen Sie die Art der aufzulösenden Gleichung!

	1	2
A	Flächeninhalt eines Dreiecks $A=\frac{1}{2}gh$ $[g]$	Zinseszins $K_n=K_0\cdot(1+\frac{p}{100})^n$ $[p,n]$
B	Umfang eines Rechtecks $U=2(a+b)$ $[b]$	Einsinktiefe beim Trampolin $mg(h+s)=\frac{1}{2}Ds^2$ $[s]$
C	Flächeninhalt eines Trapezes $A=\frac{a+c}{2}\cdot h$ $[c]$	Gay-Lussac (Wärmelehre) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}$ $[T_2]$
D	**Linsengleichung** $\frac{1}{f}=\frac{1}{g}+\frac{1}{b}$ $[g]$	Mischtemperatur $C_1\cdot(T_1-T_m)=C_2\cdot(T_m-T_2)$ $[T_m]$
E	Energieerhaltung (Physik) $mgh=\frac{1}{2}mv^2$ $[v]$	Kondensatorentladung $U=U_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ $[t]$
F	Kugelvolumen $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $[r]$	Information $S/\text{bit}=\log_2(\Omega)$ $[\Omega]$
G	Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$ $[a]$	Relativitätstheorie $m=m_0\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ $[v]$
H	pH-Wert (Chemie) $pH=-\lg(\frac{c_{H_3O^+}}{\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}})$ $[c_{H_3O^+}]$	gleichmäßige Beschleunigung $v_2=\sqrt{v_1^2+2as}$ $[s]$

Skizze zur Gleichung *D1*



5.1. Vermischte Gleichungen und Ungleichungen

Benennen Sie die Art der (Un-)Gleichung und geben Sie ihre Lösungsmenge und ggf. Definitionsmenge an!

	1	2	3	4	5
A	$4x-1-2(3+x)=-1$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-x}}{3}=0$	$\lvert x-1\rvert\le 3$	$\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2}{x}$
B	$\frac{x}{10}=x$	$v^2+1=4v$	$\sqrt{x+7}-1=x$	$\lvert x-3\rvert\le 2$	$\frac{4{,}5}{x}=\frac{x}{2}$
C	$\frac{1}{x}=0$	$(x^2+16)(x+16)=0$	$5^x=625$	$\lvert x-2\rvert=3$	$x^3=-81$
D	$3x(x-1)(5x-7)=0$	$x^4=5x^2-6$	$4^{1+x}-1=63$	$x^4=-16$	$x^4=16$
E	$1-\log_3(3x)=5$	$x^4=5x^2$	$1-2^{1-3x}=-255$	$1-(\frac{1}{2})^n>0{,}99,\ G=\mathbb{N}$	$x+1>2-x$
F	$x(x-14)=1$	$\frac{x}{5}(x-2)>0$	$x^5-4x^4=0$	$e^{-\frac{t}{0{,}3\,\text{ms}}}<0{,}1$ $[t]$	$x-2x^2+1<0$

5.3. Lineare Gleichungssysteme

Additionsverfahren

$$\begin{array}{lrl} I) & 9x+4y & =-5 \\ II) & 6x-2y & =-1 \quad \vert ① \\ \hline I) & 9x+4y & =-5 \\ II) & 12x-4y & =-2 \quad \vert ② \\ \hline I) & 9x+4y & =-5 \\ II) & 21x & =-7 \quad ③ \\ \hline \end{array}$$

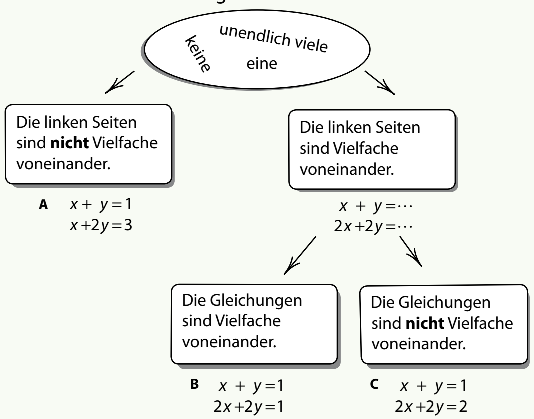
$\boxed{x=-\frac{1}{3}}$ ④

$9\cdot(-\frac{1}{3})+4y=-5 \underset{⑥}{\Rightarrow} \boxed{y=-\frac{1}{2}} \Rightarrow L=\{(-\frac{1}{3}\mid-\frac{1}{2})\}$ ⑤

Erklären Sie die einzelnen Schritte beim Additionsverfahren!

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

4. Ordnen Sie die Lösungsanzahl den drei Fällen zu!



Häufige Fehler

- Falscher Lösungsweg:

  $x^2+4x=1\,\vert-4x$
  $x^2=1-4x\Rightarrow\cdots$???

  Richtig: Allgemeine Lösungsformel verwenden, also $x^2+4x-1=0$ lösen

- Fehlendes Verständnis von **Äquivalenzumformungen:**

  $\frac{4}{3}=2x+1\,\vert-2$???

  Irgendwie die 2 und die 1 wegbringen, mit MINUS oder GETEILT?

  Richtig: Zunächst auf beiden Seiten „−1“, dann auf beiden Seiten „ : 2“ rechnen

- Bruchgleichungen:

  $\cancel{\frac{4}{3}=\frac{2}{x}\,\vert:2}$
  $\cancel{\frac{4}{3}:2=x}$??? **Falsch!**

  Richtig: Beide Seiten der Gleichung mit x multiplizieren!

- Eine Lösung unterschlagen

  $\cancel{x^2=4x\,\vert:x}$
  $\cancel{x=4}$??? **Falsch!**

  Richtig: Durch x darf nur geteilt werden, falls $x\neq 0$ ist.

  $x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0$
  $\Rightarrow x_1=0;\ \ x_2=4$

  $x=0$ ist auch Lösung.

Lösungen zu 5.

5.1. Vermischte Aufgaben

Abkürzungen:
Lineare: *LIN*
Quadratische: *QUAD*
Bruch(un)gleichung: *BRUCH*
Wurzel(un)gleichung: *ROOT*
Exponential(un)gleichung: *EXP*
Logarithmus: *LOG*
Betrags(un)gleichung: *ABS*
Gleichung höherer Ordnung: *POLY*

A1 *LIN* $4x-1-2(3+x)=-1 \Rightarrow 4x-1-6-2x=-1 \Rightarrow 2x-7=-1|+7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x=6|:2 \Rightarrow x=3$

A2 *BRUCH* $x \neq 0;\ \frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\Big|\cdot 12x \Rightarrow 12x\cdot(\frac{1}{x}+\frac{1}{3})=12x\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow$
$12+4x=3x|-4x \Rightarrow 12=-x \Rightarrow x=-12$

A3 *ROOT* $x \leq 2;\ \frac{\sqrt{2-x}}{3}=0 \Rightarrow \sqrt{2-x}=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$ Probe ok.

A4 *ABS* $|x-1|\leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1: & x-1\leq 3; \quad\quad\quad\quad x\leq 4; \quad L_1=[1;4] \\ x<1: & -(x-1)\leq 3 \quad ;x-1\geq -3 \quad ;x\geq -2;\ L_2=[-2;1[\end{cases}$
$\Rightarrow L=L_1\cup L_2=[-2;4]$

A5 *BRUCH* $x\notin\{0;-1\}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$
$\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2}{x}|\cdot x(x+1)\Rightarrow x(2x-1)=2(x+1)\Rightarrow$
$2x^2-x=2x+2|-2x-2\Rightarrow 2x^2-3x-2=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=$
$=(3\pm\sqrt{25})/4\Rightarrow x_1=2;\ x_2=-1/2\Rightarrow L=\{-1/2;\ 2\}$

B1 *LIN* $\frac{x}{10}=x|-x\Rightarrow\frac{x}{10}-x=0\Rightarrow-\frac{9}{10}x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow L=\{0\}$

B2 *QUAD* $v^2+1=4v|-4v\Rightarrow v^2-4v+1=0\Rightarrow v_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=$
$=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}\Rightarrow L=\{2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\}$

B3 *ROOT* $x\geq -7\Rightarrow D=[-7;\ +\infty[$
$\sqrt{x+7}-1=x|+1\Rightarrow\sqrt{x+7}=x+1|()^2\Rightarrow x+7=(x+1)^2$
$\Rightarrow x+7=x^2+2x+1\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow x_1=2;\quad x_2=-3$
Probe: (1) $\sqrt{2+7}-1=2$ ok. (2) $\sqrt{-3+7}-1=1$ falsch $\Rightarrow L=\{2\}$

B4 *ABS* $|x-3|\leq 2\Rightarrow$ 1) $\underline{x\geq 3}\Rightarrow x-3\leq 2\Rightarrow\underline{x\leq 5}\Rightarrow L_1=[3;\ 5]$
2) $\underline{x<3}\Rightarrow-(x-3)\leq 2\Rightarrow x-3\geq -2\Rightarrow\underline{x\geq 1}\Rightarrow L_2=[1;\ 3[\Rightarrow L=[1;\ 5]$

B5 *BRUCH* $x\neq 0\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\frac{4{,}5}{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow 4{,}5\cdot 2=x^2\Rightarrow 9=x^2\Rightarrow x=\pm 3\Rightarrow L=\{\pm 3\}$

C1 *BRUCH* $x\neq 0\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\frac{1}{x}=0|\cdot x\Rightarrow 1=0\cdot x\Rightarrow 1=0\Rightarrow L=\{\ \}$

C2 *POLY* $(x^2+16)(x+16)=0\Rightarrow x=-16$, da $x^2+16>0\Rightarrow L=\{-16\}$

C3 *EXP* $5^x=625\Rightarrow 5^x=5^4\Rightarrow x=4\Rightarrow L=\{4\}$

C4 *ABS* $|x+2|=3\Rightarrow$ 1. Fall) $x+2=3\Rightarrow\underline{x=1}\Rightarrow L_1=\{1\}$
2. Fall) $x+2=-3\Rightarrow\underline{x=-5}\Rightarrow L_2=\{-5\}\Rightarrow L=\{-5;\ 1\}$

C5 *POLY* $x^3=-81\Rightarrow x^3=-(\sqrt[3]{81})^3=(-\sqrt[3]{81})^3\Rightarrow x=-\sqrt[3]{81}\Rightarrow L=\{-\sqrt[3]{81}\}$

D1 *POLY* $3x(x-1)(5x-7)=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=7/5\Rightarrow L=\{0;\ 1;\ 7/5\}$

D2 *POLY* $x^4=5x^2-6\xrightarrow{x^2=u}u^2=5u-6\Rightarrow u^2-5u+6=0\Rightarrow$
$u_1=3;\ u_2=2\xrightarrow{x=\pm\sqrt{u}}x_{1,2}=\pm\sqrt{3};\ x_{3,4}=\pm\sqrt{2}\Rightarrow L=\{\pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{2}\}$

D3 *EXP* $4^{1+x}-1=63|+1\Rightarrow 4^{1+x}=64\Rightarrow 4^{1+x}=4^3$ (Exponenten-vergleich)
$\Rightarrow 1+x=3\Rightarrow x=2\Rightarrow L=\{2\}$

D4 *POLY* $x^4=-16\quad\Rightarrow L=\{\}$

D5 *POLY* $x^4=16\Rightarrow(x^2)^2=16\Rightarrow x^2=\pm 4$ (Quadrat immer positiv!)
$\Rightarrow x^2=+4\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow L=\{-2;+2\}$

E1 *LOG* $3x>0\Rightarrow D=\mathbb{R}^+$
$1-\log_3(3x)=5|-1\Rightarrow-\log_3(3x)=4|\cdot(-1)\Rightarrow\log_3(3x)=-4|3^{(\cdots)}\Rightarrow$
$3x=3^{-4}|:3\Rightarrow x=3^{-5}=1/3^5=1/243\Rightarrow L=\{1/243\}$

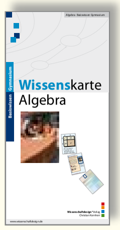
E2 *POLY* $x^4=5x^2\Rightarrow x^4-5x^2=x^2(x^2-5)=0$
$\Rightarrow x_{1,2}=0;\ x_{3,4}=\pm\sqrt{5}\Rightarrow L=\{0;\pm\sqrt{5}\}$

E3 *EXP* $1-2^{1-3x}=-255|-1\Rightarrow-2^{1-3x}=-256\Rightarrow 2^{1-3x}=2^8$ (Exponenten-vergleich)
$\Rightarrow 1-3x=8\Rightarrow x=-7/3\Rightarrow L=\{-7/3\}$

E4 *EXP* $G=\mathbb{N};\ 1-(\frac{1}{2})^n>0{,}99|-1\Rightarrow-(\frac{1}{2})^n>-0{,}01|\cdot(-1)$
$\Rightarrow(\frac{1}{2})^n<0{,}01|\log(\cdots)\Rightarrow\log((\frac{1}{2})^n)<\log(0{,}01)\Rightarrow n\cdot\log(\frac{1}{2})<\log(0{,}01)$
$\Rightarrow n>\frac{\log(0{,}01)}{\log(1/2)}\approx 6{,}64\Rightarrow L=\{7,8,9,10,\cdots\}$

E5 *LIN* $x+1>2-x|+x\Rightarrow 2x+1>2|-1\Rightarrow 2x>1|:2$
$\Rightarrow x>1/2\Rightarrow L=]0{,}5;+\infty[$

wissenschaft-design.de



Wissenskarte Algebra

Basiswissen Gymnasium
ISBN 978-3-940838-00-1

Die gesamte Schulalgebra auf einer Landkarte im Format DIN A1. Für Oberstufenschüler und Studienanfänger.

Gleichungen höherer Ordnung

Gleichungen vom Typ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=0$ mit $n>2$ nennt man Gleichungen höherer Ordnung (ausführlich: algebraische Gleichungen vom Grad n). Eine Gleichung vom Grad n hat höchstens n Lösungen!

? „Raten, Polynomdivision, Faktorisieren"

- Fehlt in der Gleichung das konstante Glied, wird x ausgeklammert! Die Ordnung der Gleichung reduziert sich.
  $x^5-2x^4-x^3+2x^2=0$
  $x^2\cdot\underbrace{(x^3-2x^2-x+2)}=0\Rightarrow\underline{x_{1,2}=0}$
- Liegt kein spezieller Gleichungstyp vor, muss die erste Lösung „erraten" werden. (Tipp: Setzen Sie systematisch $\pm 1,\ \pm 2,\cdots$ in die Gleichung ein!)
  $1^3-2\cdot 1^2-1+2=0\Rightarrow\underline{x_3=1}$
- Polynomdivision (→*Rückseite* 7.3)
  $(x^3-2x^2-x+2):(x-1)=\underbrace{x^2-x-2}$
- Quadratische Lösungsformel
  $x^2-x-2=0\Rightarrow\underline{x_4=2},\ \underline{x_5=-1}$
- Faktorzerlegung
  $x^5-2x^4-x^3+2x^2=x^2(x-1)(x-2)(x+1)$

$\cdots=u$ „Substitution"

Biquadratische Gleichungen werden mit einer Substitution (Ersetzung) gelöst.
$x^4+x^2-2=0$ Substitution: $x^2=u$
$u^2+u-2=0$
$\Rightarrow u_1=1,\ u_2=-2$ Rücksubstitution
$x^2=1$ $\quad x^2=-2$ ↯
$\Rightarrow\underline{x_1=1},\ \underline{x_2=-1}$ $\quad\Rightarrow$ keine Lösung
$\Rightarrow L=\{-1;\ 1\}$

$\pm\sqrt[n]{\ }$ „Wurzel ziehen"

Bei reinen Potenzgleichungen, $x^n=d$, wird die n-te Wurzel gezogen.

n ungerade	*n* gerade	$x^n=d$
$x^3=2$ $L=\{\sqrt[3]{2}\}$	$x^4=2$ $L=\{\pm\sqrt[4]{2}\}$	$d>0$
$x^3=-2$ $L=\{-\sqrt[3]{2}\}$	$x^4=-2$ $L=\{\}$	$d<0$

Das Wissensnetz auf der Karte beschreibt schülernah die Grundvoraussetzungen für die Mathematik in Oberstufe und Studium:
▸ Terme, ▸ Gleichungen und ▸ Funktionen.

Teilgebiete (z. B. Gleichungen höherer Ordnung und Potenzfunktionen) sind durch **Pfeile** und Querverweise miteinander vernetzt und können nach den Regeln der Lernpsychologie im Zusammenhang gelernt werden. So wird die Theorie zusammen mit typischen Fragestellungen und Musteraufgaben effektiv im Grundwissen verankert. Mit über **200 gelösten Aufgaben** und einer „Top Ten" der häufigsten Fehler ist die Karte praktisches Arbeitsmedium und komplettes Wissensgerüst in einem.

„Auch aus Sicht der Hochschule für angehende Studenten unbedingt zu empfehlen!"
Dr. Helmut Pruscha, Professor für Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München